論理学演習 第 1 回

佐野勝彦

2008 年 4 月 8 日（火）13:00-14:30
@ 京都大学文学部 新館第一講義室

本演習の目的・形式

katsuhiko.sano@gmail.com

演習の目的

- 第一目標：論理的思考、明晰な証明方法の訓練
- 訓練を通して現代論理学の標準的知識を身につける：
  - 証明論（定理）と意味論（真理）の区別
  - 対象言語とメタ言語の区別
- 楽器、スポーツの訓練と同じ。
- まず手を動かそう！

演習の形式

ほぼ毎回宿題を出します。

1. 私から前々回の宿題返却
2. 前回の宿題提出
   - 遅れて提出された宿題は受け取らない。
   - 遅刻は厳禁。やむを得ない場合は事前に理由を述べた上で授業開始よりも前に私に宿題を提出しておくこと。
3. 宿題の答え合わせ
4. 新しい課題の学習・訓練（おもに板書）
5. 質問受付後、宿題の指示

katsuhiko.sano@gmail.com

出席・成績評価の方法

- 出席はとらない。宿題提出をもって代える。
- 成績評価はほぼ毎回提出する宿題の累計成績に基づいて行なう。
- 累計成績で **60%** 以上を達成すれば合格。
  - 適宜、補正も行なう。

- 内井惣七「真理・証明・計算」ミネルヴァ書房 **1989.**
- 浮気しない！
  - 教科書ごとに表記が異なっていることが多く初心者には混乱の元。
- 参考資料 **Seminar on Logic**：
  http://www1.kcn.ne.jp/%7Eh-uchii/Logic/index.html
  - 「内井惣七 論理学演習」で **Google** 検索。
- 私も授業用の **website** を作ります。

katsuhiko.sano@gmail.com

今回の内容

katsuhiko.sano@gmail.com

- 命題論理：命題の内部に踏み込まず、ひとかたまりとして扱う。
  - 「太郎は花子の親である」はそれ以上分析されない。
  - 「A かつ B」，「A ならば B」，「A でない」
- 述語論理：命題の内部にまで踏み込む。
  - 「太郎は花子の親である」は 親 (太郎, 花子).
    - 親 (x, y) は「x は y の親である」を意味する
  - 一項述語 $P(a)$, 二項述語 $Q(a, b)$
  - さらに 量化 Quantification が入る。
  - ∀「すべて」、∃「ある」

katsuhiko.sano@gmail.com

論理への二つのアプローチ

真理アプローチ

- 命題が真であるとは？真理条件
- 論理学とは論理的真理の探究だ。
- 世界と命題の対応を明らかに。
- タルスキ

証明アプローチ

- 命題が証明できるとは？
- どのような公理を立てるか。
- そもそも証明とは？有限の立場を離れない。
- ヒルベルト、ゲンツェン

katsuhiko.sano@gmail.com

ゲーデル (1906-1978)

katsuhiko.sano@gmail.com

見取り図

	真理	証明
命題論理	真理関数の理論	自然演繹 or 公理系
述語論理	モデル理論	自然演繹 or 公理系

- 二つのアプローチの橋渡しをするのが完全性定理。
- 命題論理の完全性定理：ポスト。
- 述語論理の完全性定理：ゲーデル（1930）。
  - 有名な「不完全性定理」(1931) とは「完全性」の意味が違う。

katsuhiko.sano@gmail.com

- レポート・論文での推論のうち演繹推論はカバー。
- （科学）哲学を学ぶ上での数式アレルギーをなくす。
- 数学よりも簡単。数学にも応用が利く。
  - どんな数学の「証明」もこの講義で学ぶ意味での証明に直せる。
- 公務員試験の「判断推理」、法科大学院適性試験の「推論・分析力」

katsuhiko.sano@gmail.com

アリストテレス (384BC-322BC）

katsuhiko.sano@gmail.com

アリストテレスの定言三段論法

- 定言三段論法：
  - すべてのブタは動物だ
  - いかなる動物も石でない
  - ∴ いかなるブタも石でない
- 定言命題：すべてのブタは動物である（言い切り）
  - 全称肯定：すべての A は B である
  - 全称否定：いかなる A も B ではない
  - 特称肯定：ある A は B である
  - 特称否定：ある A は B ではない

  「である」は名辞（ものの名前）を結ぶ繋辞。
- 名辞論理学（名辞が組み合わせが本質的）

katsuhiko.sano@gmail.com

テオフラストス（371BC-287BC)

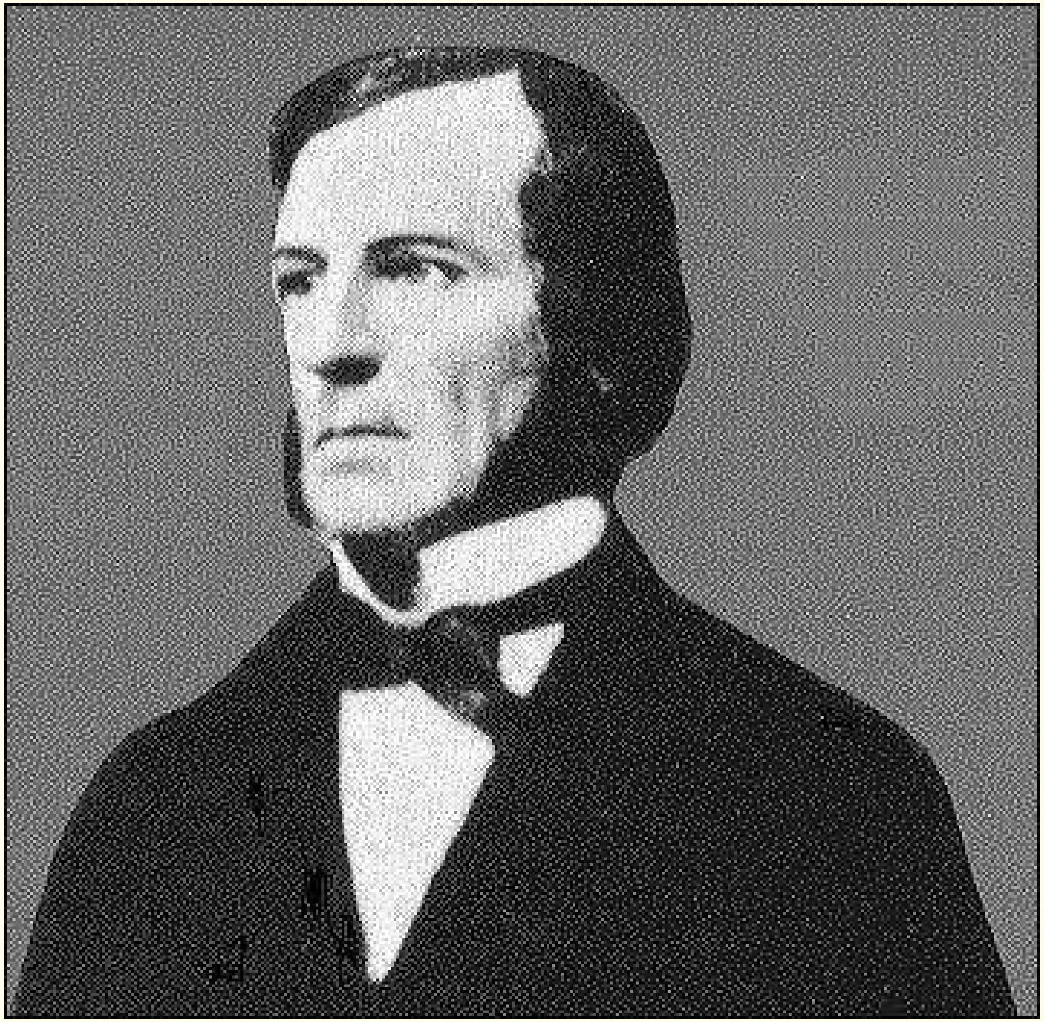
katsuhiko.sano@gmail.com

テオフラストスの仮言三段論法

- 仮言命題：「ならば」でつながれる条件文
- 仮言三段論法の理論
  - A ならば C
  - B ならば C でない
  - $\therefore$ A ならば B でない
- ここでは A, B などは名辞ではなくひとつの文。
- 仮言三段論法の正しさは？
  - 「ならば」「でない」の意味に依存するのでは。
- ストア学派での「命題論理」研究：「かつ」「または」

katsuhiko.sano@gmail.com

ブール (1815-1864)



katsuhiko.sano@gmail.com

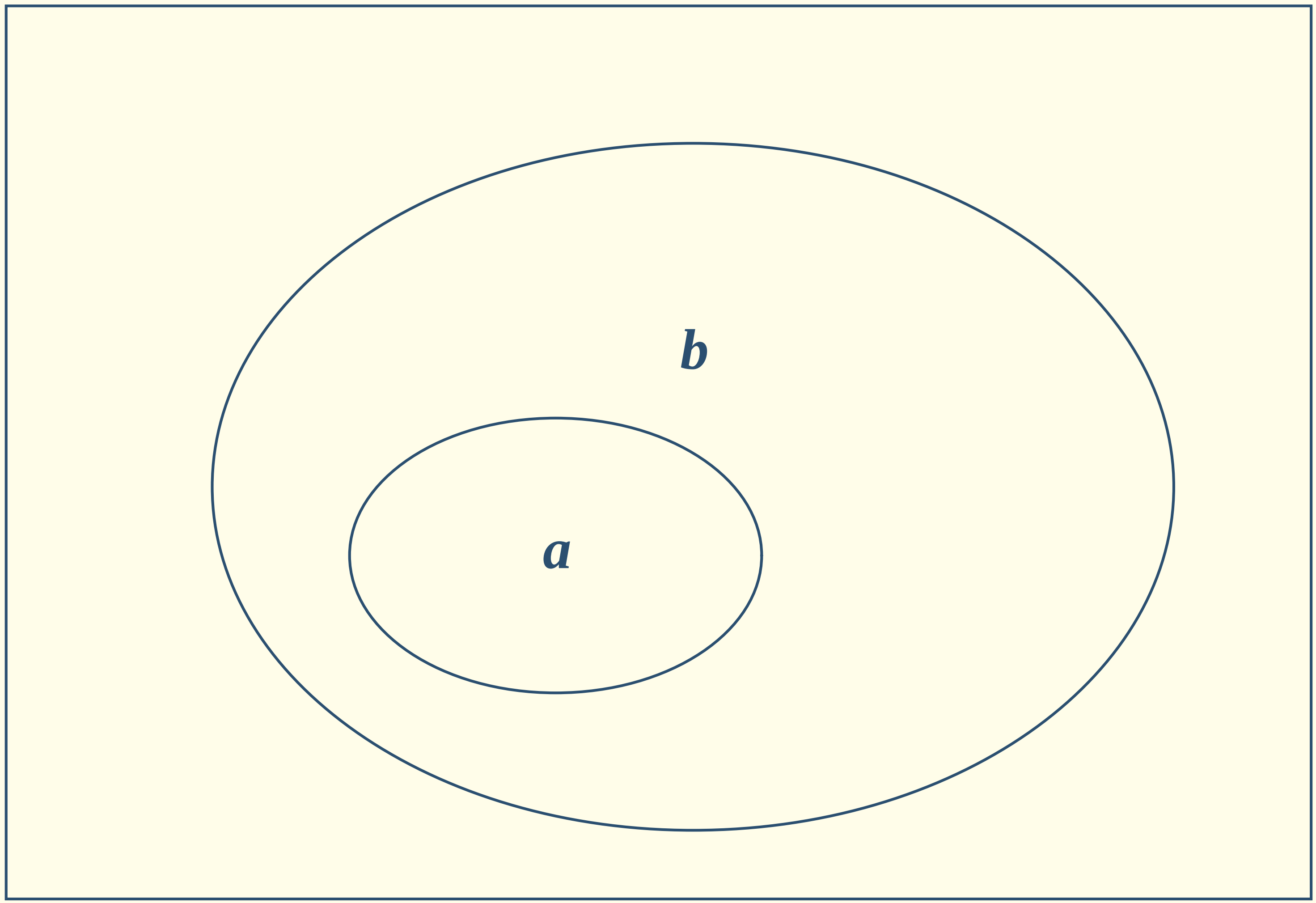
ブールの論理代数

- **19** 世紀半ばのブールとド・モルガン：
  「命題を代数的記号で書き、推論を代数的演算に」
- 依然として定言三段論法が論理の中心。定言命題を記号化。
  - 全称肯定：すべての A は B である
    $a(1 - b) = 0$
  - 全称否定：いかなる A も B ではない
    $ab = 0$
  - 特称肯定：ある A は B である
    $ab \neq 0$
  - 特称否定：ある A は B ではない
    $a(1 - b) \neq 0$

a, b はものの集まり、**1** は全クラス、**0** は空クラス。

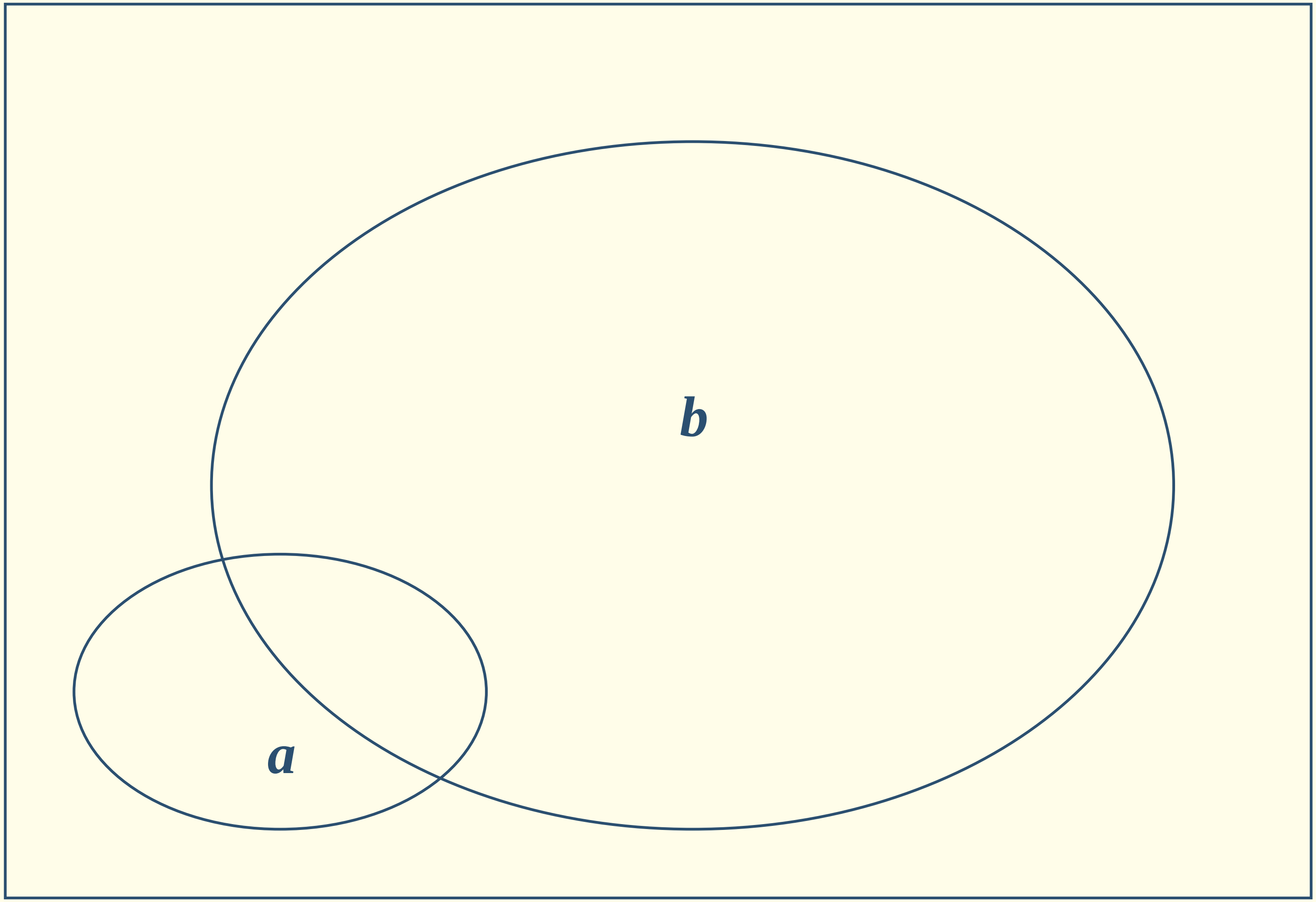
katsuhiko.sano@gmail.com

全称肯定：オイラー図で考えると



katsuhiko.sano@gmail.com

全称肯定：オイラー図で考えると（続）



katsuhiko.sano@gmail.com

ブールの命題論理の代数化

- 記号の解釈を変えれば、テオフラストス、ストア学派の「命題論理」の代数化ともみなせる。
  - a, b: 命題 A が真である場合（可能性）を表す。
  - 1: すべての場合（可能性）
  - 0: 空クラス（可能性がないこと）
- A が真：$1 - a = 0$ （A が偽である可能性がない）
- A が偽：$a = 0$ （A が真である可能性がない）
- 「A ならば B」が真：$a(1 - b) = 0$ （A が真で B が偽であることはない）

katsuhiko.sano@gmail.com

ブールの業績まとめ

- 記号とその意味が切り分けられている。
- そのおかげで一つの記号体系が二つの仕方に解釈できる。例えば $a(1-b)=0$ は:
  - すべての A が B である
  - 「A ならば B」が真
- しかし、あくまでアリストテレス以来の名辞論理学がベース。

フレーゲ (1848-1925)

katsuhiko.sano@gmail.com

フレーゲの概念記法

- 一つの体系の中で定言命題と仮言命題を統一的に扱ったのがフレーゲ。
- 動機：数学の証明をできるだけ厳密に行い、数学的真理の強固な基礎付けを与えたい $\Longrightarrow$ 『概念記法』

1. 命題の基本形は主語述語形式でなく項・関数形式（名辞論理学からの脱却）
   - $2+3=5$ で主語・述語はどれか？フレーゲにはナンセンスな問い。
   - $P(a)$, $Q(a,b)$, $R(a,b,c)$ などが基本形。
2. 命題の基本形からの命題論理の (公理系の) 構築
3. $\forall$「すべて」を含む述語論理の (公理系の) 構築

katsuhiko.sano@gmail.com

■ 命題論理への真理中心アプローチ：真理関数の理論を扱います。

A	B	$A \& B$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

■ 特に「トートロジー」の概念とその効率的な判定方法を学びます。

■ 次回からは宿題も出ます。

katsuhiko.sano@gmail.com