

# 論理学演習第 19 回 (後期第 7 回)

## 演繹定理の使い方のサンプル

佐野勝彦

2008 年 11 月 18 日

(1)  $\vdash \exists x A(x) \supset \exists x (A(x) \vee B(x))$

(段取り)

(1)  $\vdash \exists x A(x) \supset \exists x (A(x) \vee B(x))$  をいうには、まず前件の  $\exists$  を定義ではずして  $\vdash \sim \forall x \sim A(x) \supset \exists x (A(x) \vee B(x))$  をいえばよい。このためには命題論理の推論により  $\vdash \sim \exists x (A(x) \vee B(x)) \supset \forall x \sim A(x)$  をいえばよさそうだ。これを R2 でみちびくには、 $a$  を (1) で fresh なものとして、 $\vdash \sim \exists x (A(x) \vee B(x)) \supset \sim A(a)$  がいえたらよい。さらに、これを導くには、命題論理の推論により  $\vdash A(a) \supset \exists x (A(x) \vee B(x))$  を導けばよい。これを演繹定理を使って示す。

(実際の証明)

以下で D.T. とは演繹定理をさす。

- |   |                             |
|---|-----------------------------|
| 1. $A(a) \vdash A(a)$   | 仮定, $a$ is fresh in (1)     |
| 2. $A(a) \vdash A(a) \supset A(a) \vee B(a)$                            | S                           |
| 3. $A(a) \vdash A(a) \vee B(a)$   | 1, 2, R1                    |
| 4. $A(a) \vdash (A(a) \vee B(a)) \supset \exists x (A(x) \vee B(x))$    | T16                         |
| 5. $A(a) \vdash \exists x (A(x) \vee B(x))$                             | 3, 4, R1                    |
| 6. $\vdash A(a) \supset \exists x (A(x) \vee B(x))$                     | 5, D.T.                     |
| 7. $\vdash \sim \exists x (A(x) \vee B(x)) \supset \sim A(a)$           | 6, S                        |
| 8. $\vdash \sim \exists x (A(x) \vee B(x)) \supset \forall x \sim A(x)$ | 7, R2 ( $a$ の取り方から条件は満たされる) |
| 9. $\vdash \sim \forall x \sim A(x) \supset \exists x (A(x) \vee B(x))$ | 8, S                        |

$$(2) \vdash \forall x(A(x) \supset B(x)) \supset (\forall xA(x) \supset \forall xB(x))$$

(段取り)

この (2) を示すには、 $\forall x(A(x) \supset B(x)) \vdash \forall xA(x) \supset \forall xB(x)$  を示してから演繹定理を一回使えばよさそうだ。それでは  $\forall x(A(x) \supset B(x)) \vdash \forall xA(x) \supset \forall xB(x)$  を示すには、(2) で **fresh** な  $a$  を選んできて  $\forall x(A(x) \supset B(x)) \vdash \forall xA(x) \supset B(a)$  を示せばよいだろう。さらに、これを示すには、 $\forall x(A(x) \supset B(x)), \forall xA(x) \vdash B(a)$  を示してから、演繹定理を使えばよい。というわけで  $\forall x(A(x) \supset B(x)), \forall xA(x) \vdash B(a)$  を示そう。

(実際の証明)

以下では  $\forall x(A(x) \supset B(x)), \forall xA(x)$  を  $\Gamma$  と略記する。

- |   |                             |
|---|-----------------------------|
| 1. $\Gamma \vdash \forall x(A(x) \supset B(x))$   | 仮定                          |
| 2. $\Gamma \vdash \forall x(A(x) \supset B(x)) \supset (A(a) \supset B(a))$             | A4, $a$ is fresh in (2)     |
| 3. $\Gamma \vdash A(a) \supset B(a)$  | 1, 2, R1                    |
| 4. $\Gamma \vdash \forall xA(x)$  | 仮定                          |
| 5. $\Gamma \vdash \forall xA(x) \supset A(a)$   | A4                          |
| 6. $\Gamma \vdash A(a)$   | 4, 5, R1                    |
| 7. $\Gamma \vdash B(a)$   | 3, 6, R1                    |
| 8. $\forall x(A(x) \supset B(x)) \vdash \forall xA(x) \supset B(a)$                     | 7, D.T.                     |
| 9. $\forall x(A(x) \supset B(x)) \vdash \forall xA(x) \supset \forall xB(x)$            | 8, R2 ( $a$ の取り方から条件は満たされる) |
| 10. $\vdash \forall x(A(x) \supset B(x)) \supset (\forall xA(x) \supset \forall xB(x))$ | 9, D.T.                     |